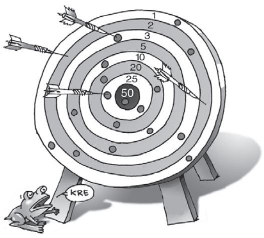
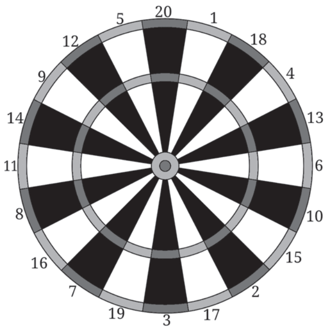
Matka 26 (2017./2018.) br. 103

PIKADO I VJEROJATNOSTI

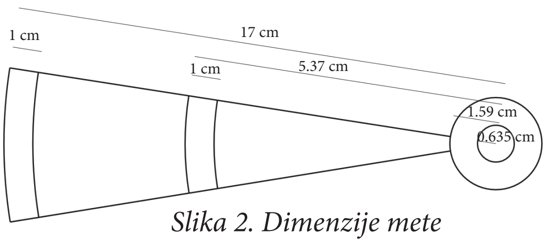
Damjan Grubelić, XV. gimnazija, Zagreb



Pikado je igra i sportska disciplina nastala u Velikoj Britaniji tijekom 19. st., u kojoj je cilj rukom bacajući strelice pogoditi okruglu metu. Standardna meta (Slika 1.) podijeljena je na 20 jednakih kružnih isječaka označenih cijelim brojevima od 1 do 20. Ti brojevi označuju broj bodova koje nosi pogodak u velike (crne/bijele) dijelove kružnog isječka. Pogodak u vanjski crveno-zeleni kružni vijenac nosi dvostruko više bodova od pogotka u crno-bijeli, a pogodak u unutarnji crveno-zeleni vijenac nosi trostruko. Pogodak u središte nosi 50 bodova, a u zeleni kružni vijenac uz središte 25. U standardnom 501 pikadu igrači započinju igru s 501 bodom. Kad je na redu, igrač baca tri strelice. Zbroj bodova koje je osvojio u tom bacanju oduzima mu se od ukupnog broja bodova. Cilj igre je doći do nule. Zadnja strelica mora pogoditi u vijenac koji nosi dvostruki broj bodova ili u središte. U suprotnom se cijelo bacanje poništava. Bacanje se poništava i ako je zbroj bodova osvojenih u jednom bacanju veći od njegova ukupnog broja bodova ili je za točno jedan manji – igrač ne može imati manje od 0 bodova.



Slika 1. Standardna meta za pikado

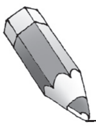


Slika 2. Dimenzije mete za pikado

Geometrijska vjerojatnost

Svaki put kad igrač baci strelicu, postoji neka vjerojatnost da će igrač pogoditi ono što gađa. Vjerojatnost da će igrač pogoditi neki broj bodova ovisi o površinama područja koja gađa i o njegovoj vještini („preciznosti"), tj. površini područja koje će sigurno pogoditi, a unutar kojeg je (radi jednostavnosti) jednaka vjerojatnost da pogodi bilo koju točku. Geometrijsku vjerojatnost u ravnini matematički bismo definirali ovako:

Ako iz ograničenog skupa točaka u ravnini (Ω) nasumično odabiremo jednu točku, tada je vjerojatnost da točka padne unutar nekog podskupa $A \subseteq \Omega$ dana formulom $p(A) = P(A) / P(\Omega)$, gdje je $P(\Omega)$ površina skupa Ω, a $P(A)$ je površina skupa A.

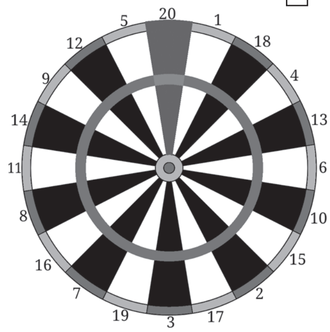


Zadatak 1. Igrač baca jednu strelicu. Ako će igrač sigurno pogoditi neku točku unutar mete, kolika je vjerojatnost da će pogoditi središte? Dimenzije mete prikazane su na slici 2: $r_\Omega = 17.00$ cm, $r_2' = 16.00$ cm, $r_3 = 10.74$ cm, $r_3' = 9.74$ cm, $r_{50} = 0.635$ cm, $r_{25} = 1.59$ cm.

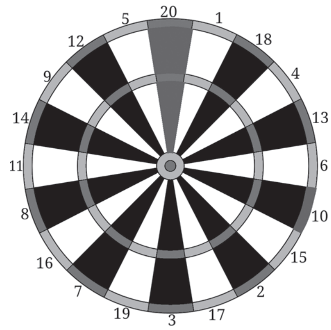
Zadatak 2. Igrač baca jednu strelicu. Ako će igrač sigurno pogoditi neku točku unutar kružnih isječaka $\triangledown_5$, $\triangledown_{20}$ i $\triangledown_1$, kolika je vjerojatnost da će osvojiti točno 50 bodova, a kolika da će osvojiti 60 bodova?

Vjerojatnost presjeka skupova

Ako postoji nekoliko uvjeta od kojih svi moraju biti ispunjeni, tada je vjerojatnost da se to postigne jednaka vjerojatnosti presjeka svih skupova koji zadovoljavaju zadani uvjet. Presjek dvaju skupova točaka $A \cap B$ su sve točke sadržane i u skupu A i u skupu B. Primijetite veznik „i" koji u zadatcima često označava presjek. Analogno formuli za geometrijsku vjerojatnost, ako iz ograničenog skupa točaka u ravnini (Ω) nasumično odabiremo jednu točku, tada je vjerojatnost da točka padne unutar presjeka nekih podskupova $A \subseteq \Omega$ i $B \subseteq \Omega$ dana formulom $p(A \cap B) = P(A \cap B) / P(\Omega)$, gdje je $P(A \cap B)$ površina presjeka skupova A i B, a $P(\Omega)$ površina skupa Ω. Dakle, ako igrač želi jednim pogotkom osvojiti maksimalan broj bodova, a sigurno će pogoditi neku nasumičnu točku unutar mete, treba pogoditi i isječak koji nosi najveći broj bodova (tj. $\triangledown_{20}$) i kružni vijenac koji će taj broj najviše uvećati (tj. onaj koji nosi trostruki broj bodova). Vjerojatnost da se to dogodi jednaka je površini onog crvenog područja u kojem se taj kružni vijenac i kružni isječak $\triangledown_{20}$ preklapaju (Slika 3.)



Slika 3. Presjek kružnog vijenca i kružnog isječka



Slika 4. Unija skupova točaka koje nose 20 bodova

Zadatak 3. Igrač baca jednu strelicu. Ostalo mu je 12 bodova. Ako će igrač sigurno pogoditi neku točku unutar mete, kolika je vjerojatnost da će pobijediti tom strelicom?

Vjerojatnost unije skupova

Ako postoji nekoliko skupova točaka na meti koji ispunjavaju zadani uvjet, tada je vjerojatnost da zadani uvjet bude ispunjen jednak vjerojatnosti unije svih skupova koji zadovoljavaju taj uvjet. Također, ako postoji više uvjeta od kojih barem jedan mora biti ispunjen, vjerojatnost da se to postigne jednaka je vjerojatnosti unije svih skupova koji zadovoljavaju barem jedan od zadanih uvjeta. Unija dvaju skupova točaka $A \cup B$ su sve točke sadržane u skupu A ili u skupu B. Primijetite veznik „ili" koji u zadatcima često označava uniju.

Ako iz ograničenog skupa točaka u ravnini (Ω) nasumično odabiremo jednu točku, tada je vjerojatnost da točka padne unutar unije nekih podskupova

$A \subseteq \Omega$ i $B \subseteq \Omega$ dana formulom

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(\Omega)}$$

gdje je $P(\Omega)$ površina skupa Ω, $P(A)$ je površina skupa A, $P(B)$ je površina skupa B, a $P(A \cap B)$ je površina presjeka skupova A i B. Dakle, ako igrač želi jednim pogotkom osvojiti 20 bodova, a sigurno će pogoditi neku nasumičnu točku unutar mete, treba pogoditi dvostruku desetku ili najveće ili drugo po veličini područje kružnog isječka $\triangledown_{20}$. Vjerojatnost da se to dogodi jednaka je zbroju tih površina podijeljenih s površinom mete (Slika 4.). Primijetite da se ništa oduzima jer je presjek tih skupova prazan skup, tj. nigdje se ne preklapaju.

Zadatak 4. Igrač baca jednu strelicu. Ako će igrač sigurno pogoditi neku točku unutar mete, kolika je vjerojatnost da će osvojiti točno 12 bodova?

Zadatak 5. Igrač baca jednu strelicu. Ostalo mu je 37 bodova. Kako bi što prije mogao završiti igru pogotkom u dvostruki vijenac, treba ili pogoditi neparan broj ili može pokušati ne prijeći 32 da u sljedećim bacanjima ima više mogućnosti za gađanje ($32 = 2^5$). Ako će sigurno pogoditi metu, kolika je vjerojatnost da će pogoditi neparan broj manji od 36 ili broj manji od 6?

Prosječan broj bodova

Ne zna se pouzdano tko je i kako smislio ovakav raspored brojeva na meti, no vjeruje se da je to krajem 19. stoljeća učnio stolar Brian Gamlin. Raspored je vrlo dobro složen jer su brojevi tako raspoređeni da gađanje većih brojeva nosi veći rizik od pogotka nekog jako malog broja. Na primjer, kružni isječak $\triangledown_{20}$ nalazi se između isječaka $\triangledown_5$ i $\triangledown_1$. Zato je neiskusnijim igračima, čija je površina unutar koje će sigurno pogoditi velika, bolje gađati u isječak $\triangledown_{16}$, nego u trostruku dvadesetku (što je česta početnička pogreška). Do danas su otkriveni i bolji rasporedi brojeva, ali ovaj je dovoljno dobar da ostane na službenoj meti. Kako bismo to pokazali, možemo odrediti prosječan broj bodova koji se dobije nasumičnim gađanjem unutar nekih skupova točaka na meti. To je moguće postići tako da zbrojimo sve brojeve bodova koje je moguće pogoditi pomnožene s vjerojatnošću da budu pogođeni.

Na primjer, ako će igrač sigurno pogoditi unutar vanjskog ruba kružnog vijenca oko središta, prosječan broj bodova koje će dobiti je

$$\frac{25 \cdot \pi(1.59^2 - 0.635^2) + 50 \cdot \pi \cdot 0.635^2}{\pi \cdot 1.59^2} \approx 28.987.$$

Zadatak 6. Usporedi prosječan broj bodova kružnih isječaka $\triangledown_5$, $\triangledown_{20}$ i $\triangledown_1$ s prosječnim brojem bodova kružnih isječaka $\triangledown_8$, $\triangledown_{16}$ i $\triangledown_7$.

Zadatak 7. Koliki je prosječan broj bodova cijele mete?

Rješenje 1. $p(A) = \dfrac{P(50)}{P(\Omega)} = \dfrac{r_{50}^{\,2}\pi}{r_{\Omega}^{\,2}\pi} \approx 0.140\ \%$

Rješenje 2. $p(A) = \dfrac{\frac{3}{20}P(50)}{\frac{3}{20}P(\Omega)} = \dfrac{r_{50}^{\,2}\pi}{r_{\Omega}^{\,2}\pi} \approx 0.140\ \%$

$$p(B) = \frac{\frac{1}{20}\left(P(3) - P(3')\right)}{\frac{3}{20}P(\Omega)} = \frac{r_3^{\,2}\pi - r_{3'}^{\,2}\pi}{3r_{\Omega}^{\,2}\pi} \approx 2.36\ \%$$

Rješenje 3. Kako bi igrač mogao pobijediti, ovom strelicom mora pogoditi i u neko od polja koja nose 12 bodova i u dvostruki vijenac. Presjek tih dvaju skupova dio je dvostrukog vijenca na kružnom isječku ⌔$_6$.

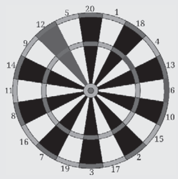
Slika 5. Zadatak 3.

$r_{\Omega} = 17.00$ cm

$r_{2'} = 16.00$ cm

$$p(A) = \frac{\frac{1}{20}\left(P(\Omega) - P(2')\right)}{P(\Omega)} = \frac{r_{\Omega}^{\,2}\pi - r_{2'}^{\,2}\pi}{20r_{\Omega}^{\,2}\pi} \approx 0.57\ \%$$

Rješenje 4. Zbroj površina svih polja koja nose 12 bodova jedna je dvadesetina cijele mete bez jedne dvadesetine središta i kružnog vijenca oko središta.



Slika 6. Zadatak 4.

$r_{\Omega} = 17.00$ cm

$r_{25} = 1.59$ cm

$$p(A) = \frac{\frac{1}{20}\left(P(\Omega) - P(25)\right)}{P(\Omega)} = \frac{r_{\Omega}^{\,2}\pi - r_{25}^{\,2}\pi}{20r_{\Omega}^{\,2}\pi} \approx 4.96\ \%$$

Rješenje 5. Prema prioritetu operator presjeka jači je od unije. Dakle, prvo trebamo odrediti presjek skupova točaka koje nose manje od 36 bodova i skupa točaka koje nose neparan broj bodova, a zatim naći uniju tog presjeka i svih točaka koje nose manje od 6 bodova.

$$p(A) = \frac{\frac{12}{20}\left(r_{2'}^{\,2} - r_3^{\,2} + r_{3'}^{\,2} - r_{25}^{\,2}\right) + \frac{6}{20}\left(r_3^{\,2} - r_{3'}^{\,2}\right) + \frac{2}{20}\left(r_{\Omega}^{\,2} - r_{2'}^{\,2}\right) + r_{25}^{\,2} - r_{50}^{\,2}}{r_{\Omega}^{\,2}} \approx 52.38\ \%$$

Rješenje 6. Ako izlučimo i pokratimo 3/20, dobit ćemo sljedeći izraz:

$$\frac{\frac{20+5+1}{3}\cdot\left(r_{2'}^{\,2} - r_3^{\,2} + r_{3'}^{\,2} - r_{25}^{\,2}\right) + \frac{40+10+2}{3}\cdot\left(r_{\Omega}^{\,2} - r_{2'}^{\,2}\right) + \frac{60+15+3}{3}\cdot\left(r_3^{\,2} - r_{3'}^{\,2}\right) + 25\cdot\left(r_{25}^{\,2} - r_{50}^{\,2}\right) + 50\cdot r_{50}^{\,2}}{r_{\Omega}^{\,2}} \approx 11.06$$

$$\frac{\frac{16+8+7}{3}\cdot\left(r_{2'}^{\,2} - r_3^{\,2} + r_{3'}^{\,2} - r_{25}^{\,2}\right) + \frac{32+16+14}{3}\cdot\left(r_{\Omega}^{\,2} - r_{2'}^{\,2}\right) + \frac{48+24+21}{3}\cdot\left(r_3^{\,2} - r_{3'}^{\,2}\right) + 25\cdot\left(r_{25}^{\,2} - r_{50}^{\,2}\right) + 50\cdot r_{50}^{\,2}}{r_{\Omega}^{\,2}} \approx 13.14$$

Rješenje 7.

$$\frac{\frac{21}{2}\cdot\left(r_{2'}^{\,2} - r_3^{\,2} + r_{3'}^{\,2} - r_{25}^{\,2}\right) + \frac{42}{2}\cdot\left(r_{\Omega}^{\,2} - r_{2'}^{\,2}\right) + \frac{63}{2}\cdot\left(r_3^{\,2} - r_{3'}^{\,2}\right) + 25\cdot\left(r_{25}^{\,2} - r_{50}^{\,2}\right) + 50\cdot r_{50}^{\,2}}{r_{\Omega}^{\,2}} \approx 13.35$$

Zaključak: isplativije je nasumično gađati u metu nego s nedovoljnom preciznošću pokušavati pogoditi trostruku dvadesetku.

Literatura:

1. S. Antoliš, A. Copić; Matematika 4, dio I, Školska knjiga (2016.)
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Darts (3. 12. 2017.)
3. https://www.bdodarts.com/images/bdo-content/doc-lib/B/bdo-playing-rules.pdf (2016.)
4. http://www.mathscareers.org.uk/article/darts/ (3. 12. 2017.)